



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Пензенский государственный университет»  
(ФГБОУ ВО «ПГУ»)

---

«Утверждаю»

Председатель приемной комиссии,  
Ректор ПГУ А.Д. Гуляков

31 октября 2023 г.



## ПРОГРАММА

вступительного испытания для поступающих на обучение по  
программам подготовки научно-педагогических кадров в  
аспирантуре

### 1.1. Математика и механика

#### 1.1.6. Вычислительная математика

Составитель  
д-р ф.-м. наук, профессор  
И.В. Бойков

Пенза, ПГУ 2023

## I. Нормированные пространства.

- 1) Определение нормированных пространств. Простейшие свойства. Примеры. Гильбертово пространство. Свойства. [1] Глава 2. Параграфы 1,2,4; [3] Глава 2. Параграфы 1,2.
- 2) Ортогональные элементы. Теорема о разложении гильбертова пространства в прямую сумму подпространств. [1] Глава 2. Параграф 4; [3] Глава 2. Параграф 7.
- 3) Ортогональные системы. Теорема об ортогонализации. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя. Формула замкнутости. [1] Глава 2. Параграф 4; [3] Глава 3. Параграфы 1,2.

## II. Линейные операторы и функционалы.

4) Основные определения. Критерий непрерывности. Нормы. [1] Глава 3. Параграфы 1,2; [3] Глава 3. Параграфы 1,2,3.

5) Пространство операторов. Примеры линейных операторов и линейных функционалов. Структура линейных операторов в гильбертовом пространстве. Структура линейных функционалов в гильбертовом пространстве. [1] Глава 3. Параграф 4; [3] Глава 5. Параграфы 1-4.

6) Сопряженные операторы. Проекторы. Теоремы о проекторах. [1] Глава 4. Параграф 3; [3] Глава 3. Параграфы 2,3.

7) Кольцо операторов. Обратный оператор. Теоремы Банаха об обратных операторах. [1] Глава 3. Параграф 2; [3] Глава 5. Параграфы 1,2.

8) Метод последовательных приближений. Применение к интегральным уравнениям. [1] Глава 1. Параграф 7; [3] Глава 5. Параграфы 3.

## III. Последовательности линейных операторов.

9) Теорема об ограниченности норм последовательности линейных операторов. Теорема Банаха — Штейнгауза. Пример применения — теорема Сёге. [3] Глава 7. Параграфы 1,2.

10) Компактные и сопряженные операторы. Компактные операторы. Определение и простейшие свойства. [1] Глава 5. Параграфы 1,2; [3] Глава 1. Параграф 3, Глава 9. Параграфы 1,2.

11) Самосопряженные операторы. Собственные значения. Простейшие свойства. Структура самосопряженного оператора. [1] Глава 7. Параграф 1; Глава 9. Параграф 3.

## IV. Функциональные уравнения.

12) Теорема о левом обратном операторе. Гомоморфизм пространств  $X$  и  $Y$ . Условия существования левого обратного оператора. [3] Глава 12. Параграф 1,2; [И] Глава 1.

13) Уравнения с компактным ядром. Альтернатива Фредгольма. [1] Глава 6. Параграф 2; [3] Глава 13. Параграфы 1, 5. Спектр. Резольвенты. Простейшие свойства резольвенты. [1] Глава 3. Параграф 5; [3] Глава 13. Параграфы 3,4.

14) Общая теория приближенных методов. [3] Глава 14. Параграфы 1,2.

15) Применение общей теории приближенных методов к бесконечномерным системам линейных алгебраических уравнений и к

интегральным уравнениям. [3] Глава 14. Параграфы 3,4,5; [9] Главы 2,3,4. Корректность по Адамару. Примеры некорректных задач. [8] Глава 1.

V. Теория функций комплексного переменного.

16) Интеграл типа Коши. Определение, основные свойства. [4] Глава 1. Параграфы 1,2,3; [5] Глава 2. Параграф 11; [9] Введение. Раздел 7.

17) Сингулярный интеграл в смысле главного значения по Коши. Доказательство существования сингулярного интеграла для функций из пространства Гельдера. Свойства сингулярного интеграла. Поведение интеграла типа Коши на контуре. Основная лемма. Формулы Сохоцкого - Племеля. [4] Глава 1. Параграф 4; [5] Глава 2. Параграфы 15, 16; [9] Введение. Раздел 7.

18) Принцип непрерывности. (Теорема об аналитическом продолжении в соприкасающихся областях). Принцип аргументы. Индекс. Определение и свойства. Обобщенная теорема Лиувилля. [4] Глава 2. Параграфы 12,3; [5] Глава 2. Параграф 39.

VI. Сингулярные интегральные уравнения и краевые задачи.

19) Постановка задачи Римана. Задача о скачке. [4] Глава 2. Параграфы 13, 14; [5] Глава 2. Параграф 40; [9] Введение. Раздел 7. Пункт 7.2.

20) Каноническая функция. Решение однородной задачи. [4] Глава 2. Параграфы 13, 14; [5] Глава 2. Параграф 36; [9] Введение. Раздел 7. Пункт 7.2.

21) Решение неоднородной задачи. Задачи Римана для гладкого контура без самопересечений, ограничивающего многосвязную область. [4] Глава 2. Параграфы 13, 14; [5] Глава 2. Параграф 37; [9] Введение. Раздел 7. Пункт 7.2.

22) Сингулярные интегральные уравнения. Композиция особых операторов. [4] Глава 3. Параграфы 20, 21; [5] Глава 3. Параграфы 44, 45; [9] Введение. Раздел 7. Пункт 7.3.

23) Решение характеристического уравнения. [4] Глава 3. Параграфы 13, 14; [5] Глава 3. Параграф 47;.

24) Регуляризация. Способы регуляризации. Связь между решениями особого и регуляризованного уравнений. [4] Глава 3. Параграфы 13, 22; [5] Глава 3. Параграфы 56, 57.

25) Теоремы Нетер для полного сингулярного интегрального уравнения. [4] Глава 3. Параграфы 13, 22; [5] Глава 3. Параграф 53.

26) Приближенные методы вычисления сингулярных интегралов. [10] Глава 3. Разделы 1,2.

27) Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений. [9] Глава 3. Раздел 2; [6] Глава 18. Раздел 18.1.

VII. Теория приближения

28) Наилучшие приближения. Теоремы Джексона. [2] Глава 4. Параграфы 1, 2,3; [7] Глава 4. Раздел 2.

29) Поперечники метрических пространств. [11] Глава 3. Разделы 1, 2,3.

30) Энтропия метрических пространств. [11] Глава 4. Разделы 1, 2, 3,4.

Рекомендуемая литература

1. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. - М.: Мир. 1965. 520 с.
2. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. - М.; Л.: ГИФМЛ, 1949. -- 688 с.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. -- М.: Наука. 1977. 750 с.
4. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука. 1968. 612 с.
6. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. - М.: ТОО "Янус", 1995. 520 с.
7. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. - М.: Наука. 1977. 511с.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука. 1974. 224 с.
9. Бойков И.В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений. Издательство ПГУ. 2004. 316 с.
10. Бойков И.В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть первая. Сингулярные интегралы. Пенза: Издательство Пензенского государственного университета. 2005. 360 с.
11. Бойков И.В. Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов. - Пенза: Издательство Пензенского государственного университета. 2007. 236 с.