



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет»
(ФГБОУ ВО «ПГУ»)

«Утверждаю»
Председатель приемной комиссии,
Ректор ПГУ А.Д. Гуляков
31 октября 2023 г.



ПРОГРАММА

вступительного испытания для поступающих на обучение по
программам подготовки научно-педагогических кадров в
аспирантуре

1.1 Математика и механика

1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика

1.1.6 Вычислительная математика

Составитель
д-р ф.-м. наук, профессор
Ю.Г. Смирнов

Пенза, ПГУ 2023

Программа вступительных испытаний разработана на основе федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 1.1 Математика и механика (уровень подготовки кадров высшей квалификации).

**Программа вступительных испытаний направления подготовки
1.1.2 - «Дифференциальные уравнения и математическая физика»**

1. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейных и нелинейных систем первого порядка ([1], § 3, 21).
2. Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами и специальными правыми частями ([1], § 7,8,10,12,14).
3. Линейные уравнения и системы с переменными коэффициентами. Многообразие решений. Формула Лиувилля-Остроградского ([1], § 14,17,18, 21).
4. Теоремы о выпрямлении векторного поля, о непрерывной зависимости решения от начальных условий и от параметров ([1], § 2,3; [10], § 7, 22).
5. Гладкость решения по начальным данным и параметрам ([1], § 24).
6. Автономные системы, Классификация особых точек. Теоремы об индексе. Теорема Пуанкаре-Бендиксона ([1], § 15,16; гл.VII § 1-4).
7. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению ([1], § 26).
8. Предельные циклы ([1], § 28).

9. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка ([2], часть 2, гл. 1, § 1).
10. Элементы вариационного исчисления. Функция Лагранжа (лагранжиан). Условия экстремума. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Импульс. Гамильтониан. Уравнения Гамильтона-Якоби ([2], часть 1, гл. 2; [3], гл.1; [9], часть 1, гл.5, § 31-36, гл.6, § 37-38).
11. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина ([3], гл.1).
12. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений второго рода ([4], часть 4, § 17-18; [7], гл.II § 4).
13. Интегральные уравнения с эрмитовым ядром; теорема Гильберта-Шмидта ([4], гл. 4, § 19-22; [7], гл.II § 5).
14. Понятие о характеристиках уравнений в частных производных. Задача Коши; теорема Ковалевской. Классификация уравнений в частных производных ([4], гл.1, § 3; [6], гл.1, § 2,3; [7], гл.1, § 1,2).
15. Физические задачи, приводящие к эллиптическим уравнениям. Свойства гармонических функций (гладкость, теоремы о среднем, принцип максимума, теорема об устранении особенности, теорема Лиувилля). Фундаментальное решение уравнения Лапласа ([4], гл.1, § 2; гл.5, § 24,27; [5], гл.4, § 1,2; [6], гл.3, § 27-30; [7], гл.1, § 3).
16. Решение краевых задач для уравнения Лапласа методом потенциалов ([4], гл.5, § 27,28,31; [5], гл.4, § 5; дополнение 1, § 3; [6], гл.3, § 31-36).
17. Обобщенные решения основных краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Разрешимость краевых задач и гладкость обобщенных решений ([7], гл.6, § 1,2; [8], гл.2).
18. Вариационный метод решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Метод Ритца ([7], гл.4, § 1).
19. Задача на собственные значения. Разложение в ряды по собственным функциям ([4], гл.5, § 21,22; [7], гл.4, § 1, п.3-5; [8], гл.2, § 4).

20. Свойства решений однородного уравнения теплопроводности (гладкость, принцип максимума). Фундаментальное решение. Задача Коши ([4], гл.1, § 2; гл.3, § 11,16; [5], гл.3, § 1; гл.4, § 1; [6], гл.3, § 38-40; [7], гл.6, § 1; [8], гл. 3).
21. Основные смешанные задачи для уравнения теплопроводности; классические и обобщенные решения смешанных задач ([4], гл.6, § 34; [5], дополнение 1, § 2; [7], гл.5, § 1; [8], гл.3).
22. Конечная гладкость решения уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши ([4], гл.1, § 2; гл.3, § 12-14; [5], гл.2, § 2, гл.5, § 1,2; [6], гл.2, § 11-13; [7], гл.5, § 1; [8], гл.4).
23. Основные смешанные задачи для волнового уравнения. Метод Фурье решения смешанных задач. Метод Галеркина решения смешанных задач для волнового уравнения ([4], гл.6, § 33; гл.2, § 3; гл.5, § 3; [6], гл.2, § 17-23; [7], гл.5, § 2; [8], гл.4).
24. Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста ([4], гл.2, § 5-9; гл.3, § 11).
25. Пространства Соболева. Теоремы вложения и теоремы о следах. ([8, 9]).
26. Псевдодифференциальные операторы и псевдодифференциальные уравнения.([9]).

Рекомендуемая литература

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.4, ч.1,2. М.: Наука, 1981.
3. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1984.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
6. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
7. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
8. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.:Наука, 1973.
9. Агранович М.С. Эллиптические псевдодифференциальные операторы. М.:МЦНМО, 2010.
10. Арнольд В.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:МЦНМО, 2012.
11. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Мир, 1970.

Председатель предметной экзаменационной комиссии  Ю.Г. Смирнов