МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет»
(ФГБОУ ВО «ПГУ»)

«Утверждаю»
Председатель приемной комиссии,
Ректор ПГУ ___________ А.Д Гуляков
31 октября 2022 г.

ПРОГРАММА
вступительного испытания для поступающих на обучение по программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре

1.1 Математика и механика
1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика
1. 1.6 Вычислительная математика

Составитель
д-р ф.-м. наук, профессор
Ю.Г. Смирнов

Пенза, ПГУ 2022

Программа вступительных испытаний разработан на основе федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 1.1 Математика и механика (уровень подготовки кадров высшей квалификации).

Программа вступительных испытаний направления подготовки 1.1.2 - «Дифференциальные уравнения и математическая физика»

1. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейных и нелинейных систем первого порядка ([1], § 3, 21).
2. Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами и специальными правыми частями ([1], § 7,8,10,12,14).
3. Линейные уравнения и системы с переменными коэффициентами. Многообразие решений. Формула Лиувилля-Остроградского ([1], § 14,17,18, 21).
4. Теоремы о выпрямлении векторного поля, о непрерывной зависимости решения от начальных условий и от параметров ([1], § 2,3; [10], § 7, 22).
5. Гладкость решения по начальным данным и параметрам ([1], § 24).
6. Автономные системы, Классификация особых точек. Теоремы об индексе. Теорема Пуанкаре-Бендиксона ([1], § 15,16; гл.VII § 1-4).
7. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению ([1], § 26).
8. Предельные циклы ([1], § 28).

9. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка ([2], часть 2, гл. 1, § 1).

10. Элементы вариационного исчисления. Функция Лагранжа (лагранжиан). Условия экстремума. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Импульс. Гамильтониан. Уравнения Гамильтона-Якоби ([2], часть 1, гл. 2; [3], гл.1; [9], часть 1, гл.5, § 31-36, гл.6, § 37-38).

11. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина ([3], гл.I).

12. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений второго рода ([4], часть 4, § 17-18; [7], гл.II § 4).

13. Интегральные уравнения с эрмитовым ядром; теорема Гильберта-Шмидта ([4], гл. 4, § 19-22; [7], гл.II § 5).

14. Понятие о характеристиках уравнений в частных производных. Задача Коши; теорема Ковалевской. Классификация уравнений в частных производных ([4], гл.1, § 3; [6], гл.1, § 2,3; [7], гл.1, § 1,2).

15. Физические задачи, приводящие к эллиптическим уравнениям. Свойства гармонических функций (гладкость, теоремы о среднем, принцип максимума, теорема об устранении особенности, теорема Лиувилля). Фундаментальное решение уравнения Лапласа ([4], гл.1, § 2; гл.5, § 24,27; [5], гл.4, § 1,2; [6], гл.3, § 27-30; [7], гл.1, § 3).

16. Решение краевых задач для уравнения Лапласа методом потенциалов ([4], гл.5, § 27,28,31; [5], гл.4, § 5; дополнение 1, § 3; [6], гл.3, § 31-36).

17. Обобщенные решения основных краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Разрешимость краевых задач и гладкость обобщенных решений ([7], гл.6, § 1,2; [8], гл.2).

18. Вариационный метод решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Метод Ритца ([7], гл.4, § 1).

19. Задача на собственные значения. Разложение в ряды по собственным функциям ([4], гл.5, § 21,22; [7], гл.4, § 1, п.3-5; [8], гл.2, § 4).

20. Свойства решений однородного уравнения теплопроводности (гладкость, принцип максимума). Фундаментальное решение. Задача Коши ([4], гл.1, § 2; гл.3, § 11,16; [5], гл.3, § 1; гл.4, § 1; [6], гл.3, § 38-40; [7], гл.6, § 1; [8], гл. 3).
21. Основные смешанные задачи для уравнения теплопроводности; классические и обобщенные решения смешанных задач ([4], гл.6, § 34; [5], дополнение 1, § 2; [7], гл.5, § 1; [8], гл.3).
22. Конечная гладкость решения уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши ([4], гл.1, § 2; гл.3, § 12-14; [5], гл.2, § 2, гл.5, § 1,2; [6], гл.2, § 11-13; [7], гл.5, § 1; [8], гл.4).
23. Основные смешанные задачи для волнового уравнения. Метод Фурье решения смешанных задач. Метод Галеркина решения смешанных задач для волнового уравнения ([4], гл.6, § 33; гл.2, § 3; гл.5, § 3; [6], гл.2, § 17-23; [7], гл.5, § 2; [8], гл.4).
24. Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста ([4], гл.2, § 5-9; гл.3, § 11).
25. Пространства Соболева. Теоремы вложения и теоремы о следах. ([8, 9]).
26. Псевдодифференциальные операторы и псевдодифференциальные уравнения.([9]).

Рекомендуемая литература

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.4, ч.1,2. М.: Наука, 1981.
3. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1984.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
6. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
7. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
8. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.:Наука, 1973.
9. Агранович М.С. Эллиптические псевдодифференциальные операторы. М.:МЦНМО, 2010.
10. Арнольд В.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:МЦНМО, 2012.
11. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Мир, 1970.

Председатель предметной экзаменационной комиссии ЮСм Ю.Г. Смирнов